第 4 講　数学的帰納法

PART1　数学的帰納法による証明

1 (1) すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

(2) n が自然数のとき, 5^n-2^n が 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

Point Pickup

自然数 n に関する命題 P がすべての自然数 n で成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り

[1]　$n=1$ のとき命題 P が成り立つことを示す。

[2]　$n=k$ のとき命題 P が成り立つことを仮定し, $n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

第４講　PART1　確認問題

1　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

……（＊）

とする。

[1]　$n=$ [ア] のとき

（（＊）の左辺）＝ [イ]

（（＊）の右辺）＝ [ウ]

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

このとき

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\boxed{\text{エ}}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\frac{k+\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\left(k+\boxed{\text{キ}}\right)}=\frac{(k+1)+\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{カ}}\left\{(k+1)+\boxed{\text{ケ}}\right\}}$$

よって，$n=$ [コ] のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

[イ , ウ の選択肢]

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{8}{9}$

[エ の選択肢]

① $\dfrac{k+2}{2(k+1)}$　② $\dfrac{k+3}{2(k+2)}$

③ $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$　④ $\dfrac{n+3}{2(n+2)}$

⑤ $\left\{1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right\}$　⑥ $\left\{1-\dfrac{1}{(k+2)^2}\right\}$

[コ の選択肢]

① $n-1$　② $n+1$

③ $k-1$　④ k　⑤ $k+1$

2 n が自然数のとき，$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ。

（証明）

「$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数である」を（＊）とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$2^{6\cdot1-5}+3^{2\cdot1}=\boxed{\text{サシ}}$$

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$2^{6k-5}+3^{2k}$ は 11 の倍数

すなわち　$2^{6k-5}+3^{2k}=\boxed{\text{スセ}}\,m$（$m$ は整数）

このとき

$$\begin{aligned}&2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}\\&=\boxed{\text{ソタ}}\cdot2^{6k-5}+\boxed{\text{チ}}\cdot3^{2k}\\&=\boxed{\text{ソタ}}\left(\boxed{\text{スセ}}\,m-3^{2k}\right)+\boxed{\text{チ}}\cdot3^{2k}\\&=11\left(\boxed{\text{ツテ}}\,m-\boxed{\text{ト}}\cdot3^{2k}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ツテ}}\,m-\boxed{\text{ト}}\cdot3^{2k}$ は整数であるから，

$2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}$ は 11 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

第 4 講　数学的帰納法

PART1　数学的帰納法による証明

1 (1)　すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

(2)　n が自然数のとき，5^n-2^n が 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

(1)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(①の左辺)$=2$,（①の右辺)$=2\cdot 1=2$

よって，$n=1$ のとき　①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)$$

このとき

$$\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\{(k+1)+3\}\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)\{2(k+1)\}$$
$$=(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)\{2(k+1)\}$$
$$=2(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)$$
$$=2\cdot 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)$$
$$=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot\{2(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

(2)　「5^n-2^n は 3 の倍数である」を①とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$5^1-2^1=3$ より，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

5^k-2^k は 3 の倍数　すなわち　$5^k-2^k=3m$（m は整数)とおける。

このとき

$$5^{k+1}-2^{k+1}=5\cdot 5^k-2^{k+1}=5(3m+2^k)-2\cdot 2^k=5\cdot 3m+3\cdot 2^k=3(5m+2^k)$$

$5m+2^k$ は整数であるから，$5^{k+1}-2^{k+1}$ は 3 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

第 4 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：③，ウ：③，エ：①，オ：3，
カ：2，キ：2，ク：2，ケ：1，コ：⑤

[解説]

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\cdots\cdots(*)$$

とする。

[1]　$n=1$ のとき　[A]

$$((*)\text{の左辺})=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

$$((*)\text{の右辺})=\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$$

よって，$(*)$は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，$(*)$が成り立つと仮定すると

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

このとき

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\frac{\boldsymbol{k+2}}{\boldsymbol{2(k+1)}}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+3}{2(k+2)}=\frac{(k+1)+2}{2\{(k+1)+1\}}$$

[A]　数学的帰納法
自然数 n に関する命題 P がすべての自然数 n で成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り。
[1]　$n=1$ のとき命題 P が成り立つことを示す。
[2]　$n=k$ のとき命題 P が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

よって，$n=\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

2 **[正解]** **サシ**：11，**スセ**：11，**ソタ**：64，**チ**：9，
ツテ：64，**ト**：5

[解説]

「$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数である」を（＊）とする。

[1]　$n=1$ のとき [A]

$$2^{6\cdot1-5}+3^{2\cdot1}=2+9=\mathbf{11}$$

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$$2^{6k-5}+3^{2k} \text{ は 11 の倍数}$$

すなわち　$2^{6k-5}+3^{2k}=\mathbf{11}m$（$m$ は整数）

このとき

$$\begin{aligned}&2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}\\&=2^6\cdot2^{6k-5}+3^2\cdot3^{2k}\\&=\mathbf{64}\cdot2^{6k-5}+\mathbf{9}\cdot3^{2k}\\&=64\left(11m-3^{2k}\right)+9\cdot3^{2k}\\&=64\cdot11m-55\cdot3^{2k}\\&=11\left(\mathbf{64}m-\mathbf{5}\cdot3^{2k}\right)\end{aligned}$$

$64m-5\cdot3^{2k}$ は整数であるから，

$2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}$ は 11 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。